كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الاول للعام 2016 /2017
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : 90 دقيقة

السؤال الأول (34 درجة) أ) إذا كانت الدالتان f مستمرة و g ذ ت م على الفترة $[a,b]$.أثبت أن الدالة $I(x)=\int_a^x f(t)\,dg(t)\ ;\ a\le x\le b$ ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$ مع ذكر خاصتين للدالة I على نفس الفترة .

ب) بنفس الشروط السابقة على $f\ ,\ g$ بين صحة المتراجحة (مع الحديث عن وجود التكامل) :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right|\le \max_{a\le x\le b}|f|\,V_a^b(g)$$

ت)ليكن K_1,K_2 صفين غير خاليين من $P(X)$ ،عندئذ إذا كان $K_1\subset K_2\subset A(K_1)$ فاثبت أن $A(K_1)=A(K_2)$ و متى يكون القياس تاماً ؟

السؤال الثاني (33 درجة):أ) إذا كانت $X=Z$ و الجبر التام $S=P(Z)$ و لتكن μ دالة على S معرفة كما يلي :

$$\mu: S\to \overline{R}\ ,\ E\to \mu(E)=\begin{cases}0 & \text{عدد عناصر } E \text{ منتهٍ}\\ \infty & \text{عدد عناصر } E \text{ غير منتهٍ}\end{cases}$$

أثبت أن μ ليست جمعية تامة على S ؟ و هل هي جمعية منتهية و لماذا ؟ ثم أوجد $\mu(Z)$.

ب) بين أن المتتالية العددية التي حدها العام: $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$ ذ ت م و كوشي (أياً كانت $1\le n$) مع ذكر خاصتين من خواص المجموعة المقيسة بالنسبة ل μ^*

ج) -أيعتبر الفضاء $BV_{[a,b]}$ باناخياً بايجاز ، و أحسب فيه المسافة بين الدالتين : $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=2x$ على $[1,3]$ و كذلك نظيم f فقط عليها.

-إذا كانت الدالة f كمولة حسب ستيلجس بالنسبة ل g على $[a,b]$ و كان $\int_a^b f(x)\,dg=0$ من أجل كل f تختارها متزايدة و لها نقطة انقطاع من النوع الأول على $[a,b]$. اثبت ان g تكون دالة ثابتة على $[a,b]$.

السؤال الثالث (33 درجة):1) ما هو مجموع متسلسلة القوى . $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ، ثم اكتبها بالشكل : $f(x)=C+\int_a^x \varphi(1)dt$ و استنتج إنها ذ ت م على $[0,1]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة .

-هات مثال على دالة تكون فيها f مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ ،إلا أن $\sqrt{f}$ ليست كذلك عليها ، و هل مشتق f موجود تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ؟

2) إذا كانت Ω مجموعة غير منتهية وليكن $A\subseteq p(\Omega)$ صفاً معرفاً كما يلي:

$$A=\{G\in p(\Omega)\ :\ G \text{ منتهية أو } \tilde{G} \text{ منتهية}\}$$

بين فيما إذا كان هذا الصف جبر تام على Ω ، و هل يصح أن يكون جبراً و تبولوجيا عليها مع التعليل ؟

3) بين أن تكامل ليبيغ للدالة الآتية : $h(x)=(1+\cos^2 x)[1-\varphi(x)]$ موجود و أحسبه على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ حيث φ هي دالة ديريخليه .

---انتهت الأسئلة---

حمص في 30/ 1 / 2017

مدرس المقرر:د.محمد عامر

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

رياضيات 100   أ.د. ...   (7)

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
2017 - ف 1
س 3 - رياضيات

كلية العلوم
قسم الرياضيات

س1 (34°) أ) (P) لدينا f مستمرة و g ذات تغير محدود على $[a,b]$ ولنثبت أن I دالة ذات تغير محدود.

لنفترض $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f|$، ولتكن P أي تجزئة لـ $[a,b]$ فيكون

$$V(I,P) = \sum_{k=1}^{n} |I(x_k) - I(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dg(t) \right| \le M \sum_{k=1}^{n} \overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}}(g) = M \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

مما يعني أن I ذات تغير محدود على $[a,b]$

من خواص الدالة I، إنها مستمرة عند $x = x_0$ إذا كانت g مستمرة فيها وكذلك الاشتقاقية.

التصويب: لذلك ذات تغير محدود على $[a,b]$ أو لا يشترط عن امكانية الاستمرار والاشتقاق لوجودها.

ب) نتطلب نفس الشروط في f و g على $[a,b]$ نقول إن التكامل موجود لكل f و g بهذه الشروط ودون حساب اختيار من أجل أي تجزئة P لـ $[a,b]$ لدينا الآن

$$|S(f,g;P)| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|\Delta g(x_k)| \le \underbrace{\max_{a\le x\le b} |f|}_{M} \sum_{k=1}^{n} |\Delta g(x_k)| \le M \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

ويكون $\lambda(P) \to 0$ $(n\to\infty)$ بتعويم المتراجحة الأخيرة (أو النهاية).

ت) حسب المعطيات نكتب

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow A(K_1) \subset A(K_2), \ldots (1)$$

$$K_2 \subset A(K_1) \Rightarrow A(K_2) \subset A(A(K_1)) = A(K_1), \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $A(K_1) = A(K_2)$ وهو (م.ط).

وتكون القياس مرناً (تاماً): يقال عن قياس مرن بأنه تام (أو كامل) إذا تحقق ما

$$E \subset F,\ F \in S,\ \mu(F) = 0 \Rightarrow E \in S$$

س2 (33°) (P) لدينا $X = \mathbb{Z}$ و $S = P(\mathbb{Z})$ جبراً على X، من الواضح أن

أنه مرنت غير تام؟ لو أخذنا متتالية المجموعات ومنقطعة $E_k = \{k\}$ و $k \in N$

نجد أنه $E_k \in S$ من أجل كل $k \in N$ وأنه $E_l \underset{l\neq k}{\cap} E_k = \phi$ وبالإضافة مع ذلك لدينا

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(N) = \infty \quad \text{إذاً} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

ما يعني أنه مرنت غير تام (أو ليس جمعياً).

μ جمعي منتهي (أو منتهياً) على S، من أجل E، F ⊃ S مع $E \cap F = \phi$ سيكون لدينا،

$$\mu(E+F) = \mu(E) + \mu(F)$$

أي أنه جمع منتهٍ، ولدينا،

$\mu(\mathbb{Z}) = \infty$ (لأن $\mathbb{Z}$ غير منتهية)

بفرض أنه لدينا المتسلسلة $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ ذات تغير محدود وذلك حسب التعريف :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| < M \quad ; n \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \right| < M$$

أي أنها ذات تغير محدود لكل $n \geq 1$ وهي كذلك حسب تعريف ... لكل $n \geq 1$.

25

خواص القياس الخارجي : (ج 1) إذا كانت $\mu^*(E) = 0$ فإن $E \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$.

(ج 2) إذا كانت $E, G \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ فإن $E \cup G$ و $E \cap G$ ... معرفة

(ت) نعم الفضاء $BV[a,b]$ باناخ لأنه ... (الكل ... متقارب ...)

حساب المسافة :

$$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + \overset{3}{\underset{1}{V}}(f-g)$$

$$= |2-2| + \overset{3}{\underset{1}{V}}[(x-1)]^2 = 0 + (2)^2 - 0 = 4$$

متزايدة

$$\|f\| = \|x^2+1\| = |f(a)| + \overset{3}{\underset{1}{V}}(f) = 2 + (10-2) = 10$$

مسألة ستيلتجس ... : $f \in S(g)$ على $[a,b]$ و $\int_a^b f\,dg = 0$ حيث f دالة ...

والمطلوب أن g دالة ثابتة ... ، باستخدام التكامل بالتجزئة ...

$$\int_a^b g\,df = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$$

لتكن $c \in [a,b]$ ... دالة f ... كالتالي :

لكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; a \leq x \leq c \\ 1 & ; c < x \leq b \end{cases}$$

$$\int_a^b g\,df = g(c)\,[f(c+0) - f(c-0)] = g(c)(1) = g(c) \quad \text{--- ①}$$

$$\int_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a) = 1 \cdot g(b) - 0\,g(a) = g(b) \Rightarrow$$

$$g(b) = g(c) \Rightarrow g = c \; (\text{ثابت}) \; ; x \in [a,b]$$

السؤال الثالث (33) ، (أ) مجموع ... $f(x) = \arctan x$ على $[0,1]$ ... 8

$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} \; : x \in [0,1]$ ، ... $\int_0^1 \left| \frac{dx}{x^2+1} \right| < \infty$ ...

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(\arctan x) = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

- ... $f \in C[a,b]$ ، A ... 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2 \frac{1}{x} & ; x \in (0,1] \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

...

$$\sqrt{f} = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} ; & x \in (0,1] \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}$$

وهي مستمرة في $[0,1]$ لأنه لا يوجد لها نقاط انقطاع.

- نلاحظ مستمرة $\sqrt{f}$ قابلة للتكامل ريمانياً في $[0,1]$ لأن مجموعة نقاط انقطاعها لها قياس الصفر.

2) ليكن Ω مجموعة غير منتهية ولتكن $A \subseteq P(\Omega)$ والذي لا يحوي

هذا الصف ليس جبراً تاماً على Ω، وذلك لأنه لو أخذنا $\mathbb{Z} = \Omega$ ولنأخذ

$S \subseteq P(\Omega)$ ، $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots \in S$ فإننا نجد أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N} \notin S$ وذلك لأنها،

ولكنه جبر أي يحوي ϕ و Ω و A ومغلق بالنسبة لعمليات الاتحاد المنتهي والمتممة كون E إذا $E^c \in A$. (ويسمى هذا النوع من الجبر بجبر المجموعات المنتهية)

- نلاحظ ... لأنه جبر (أي على Ω).

3) تكامل ليبيغ ... الفرع ① على $[0,\frac{\pi}{2}]$ ... $\lambda(E) = \frac{\pi}{2} < \infty$

والدالة φ مقيسة لأنها مستمرة في $[0,\frac{\pi}{2}]$ ومحدودة $|\varphi| \le 1 \; ; \forall x \in E$

حيث $E = [0,\frac{\pi}{2}]$ وكذلك الدالة $h(x) = \sim$ مقيسة لأنها مجموع دالتين مقيستين على E ومحدودة لأن $|h(x)| \le 1+1 = 2$ ومنه بالتالي

$$I = (L)\int_E h(x)\, d\lambda = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} h(x)\, d\lambda$$

ونلاحظ أن $h(x) = (1+\cos^2 x)$ في $[0,1]$ قابلة للتكامل ريمانياً

لأن مجموعة نقاط انقطاعها ذات قياس صفر ...

$$I = (L)\int_E \sim = (R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[3x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[3\frac{\pi}{2} + 0\right] = \frac{3\pi}{4}$$

أستاذ المقرر

د. ...

(انتهى)

تم بتوفيق الله.

الاثنين 30/6/2017